6.2 平面向量的运算

我们知道，数能进行运算，因为有了运算而使数的威力无穷. 那么，向量是否也能像数一样进行运算呢？人们从向量的物理背景和数的运算中得到启发，引进了向量的运算. 本节我们就来研究平面向量的运算，探索其运算性质，体会向量运算的作用.

下面先学习向量的加法.

6.2.1 向量的加法运算

我们知道，位移、力是向量，它们可以合成. 能否从位移、力的合成中得到启发，引进向量的加法呢？

思考

如图 6.2-1，某质点从点 A 经过点 B 到点 C，这个质点的位移如何表示？

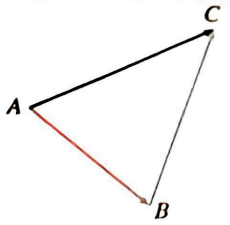


图 6.2-1

物理知识告诉我们，这个质点两次位移$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$的结果，与从点 A 直接到点 C 的位移$\overrightarrow{AC}$结果相同. 因此，位移$\overrightarrow{AC}$可以看作位移$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$合成的. 数的加法启发我们，从运算的角度看，$\overrightarrow{AC}$可以看作$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的和，即位移的合成可以看作向量的加法.

如图 6.2-2，已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内取任意一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

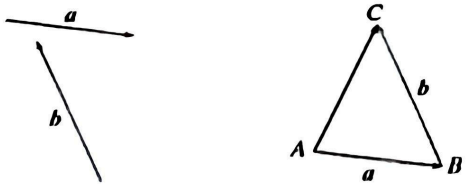


图 6.2-2

求两个向量和的运算，叫做**向量的加法**. 这种求向量和的方法称为向量加法的三角形法则. 位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型.

我们再来看力的合成问题.

思考

如图 6.2-3，在光滑的平面上，一个物体同时受到两个外力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用，你能作出这个物体所受的合力 $\boldsymbol{F}$ 吗？

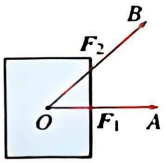


图 6.2-3

我们知道，合力 $\boldsymbol{F}$ 在以 OA、OB 为邻边的平行四边形的对对角线上，并且大小等于这条对角线的长. 从运算的角度看，$\boldsymbol{F}$ 可以看作 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的和，即力的合成可以看作向量的加法.

如图 6.2-4，以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以 OA，OB 为邻边作 $\square OACB$，则以 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OC}$（OC 是 $\square OACB$ 的对角线）就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 我们把这种作两个向量和的方法叫做**向量加法的平行四边形法则**. 力的合成可以看作向量加法平行四边形法则的物理模型.

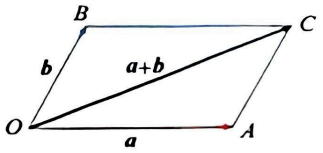


图 6.2-4

思考

向量加法的平行四边形法则与三角形法则一致吗？为什么？

对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$，我们规定

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

例 1 如图 6.2-5，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

作法 1：在平面内任取一点 O（图 6.2-6（1）），作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$. 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

作法 2：在平面内任取一点 O（图 6.2-6（2）），作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 以 OA，OB 为邻边作 $\square OACB$，连接 OC，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

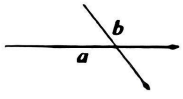
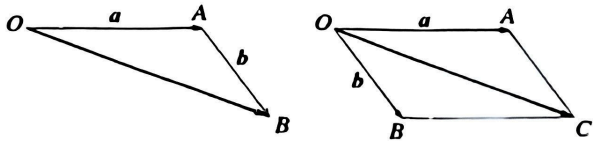


图 6.2-5



(1)　　(2)

图 6.2-6

探究

（1）如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，它们的加法与数　　、有什么关系？你能作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 吗？

（2）结合例 1，探索 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 之间的关系.

一般地，我们有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

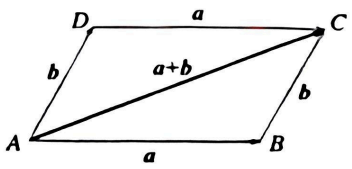
当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量时，等号成立.

根据数的运算的学习经验，定义了一种运算，就要研究相应的运算律，运算律可以有效地简化运算.

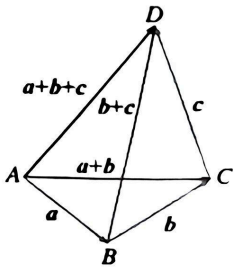
探究

数的加法满足交换律、结合律，向量的加法是否也满足交换律和结合律呢？

如图 6.2-7（1），作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作 $\square ABCD$，容易发现 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$，故 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.



（1）



（2）

图 6.2-7

由图 6.2-7（2），你能否验证

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})?$$

综上所述，向量的加法满足交换律和结合律.

例 2　长江两岸之间没有大桥的地方，常常通过轮渡进行运输. 如图 6.2-8，一艘船从长江南岸 A 地出发，垂直于对岸航行，航行速度的大小为 15 km/h，同时江水的速度为向东 6 km/h.

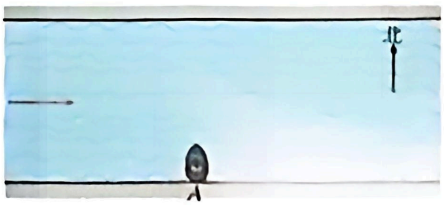


图 6.2-8

（1）用向量表示江水速度、船速以及船实际航行的速度；

（2）求船实际航行的速度的大小（结果保留小数点后一位）与方向（用与水速度间的夹角表示，精确到1°）.

解 （1）如图6.2-9，$\overrightarrow{AD}$表示船速，$\overrightarrow{AB}$表示江水速度，以AD，AB为邻边作□$ABCD$，则$\overrightarrow{AC}$表示船实际航行的速度.



图6.2-9

（2）在Rt△ABC中，$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{BC}|=15$，于是

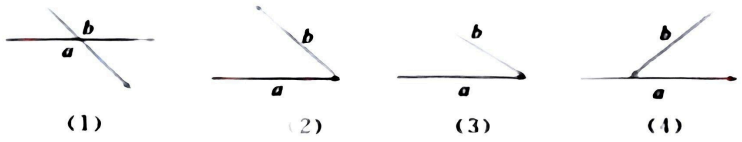
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}=\sqrt{6^2+15^2}=\sqrt{261}\approx16.2.$$

因为$\tan\angle CAB=\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{5}{2}$，所以利用计算工具可得$\angle CAB\approx68°$.

因此，船实际航行速度的大小约为16.2 km/h，方向与江水速度间的夹角约为68°.

练习

1. 如图，在下列各小题中，已知向量a，b，分别用两种方法求作向量$a+b$.

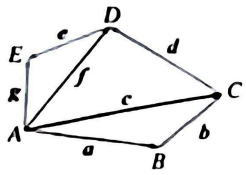


（1） （2） （3） （4）

（第1题）

2. 当向量a，b满足什么条件时，$|a+b|=|a|+|b|$（或$|b|-|a|$）?

3. 根据图示填空：



（第3题）

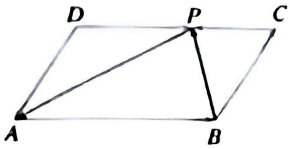
（1）$a+b=$_____；

（2）$c+d=$_____；

（3）$a+b+d=$_____；

（4）$c+d+e=$_____.

4. 如图，四边形$ABCD$是平行四边形，点P在CD上，判断下列各式是否正确（正确的在括号内打“√”，错误的打“×”）.



（第4题）

（1）$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PA}$. （ ）

（2）$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{DP}$. （ ）

（3）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$. （ ）

5. 有一条东西向的小河，一艘小船从河南岸的渡口出发渡河. 小船航行速度的大小为15 km/h，方向为北偏西30°，水流的速度为向东7.5 km/h，求小船实际航行速度的大小与方向.