人民教育出版社

10.2 事件的相互独立性

前面我们研究过互斥事件、对立事件的概率性质，还研究过和事件的概率计算方法．对于积事件的概率，你能提出什么值得研究的问题吗？

我们知道，积事件 AB 就是事件 A 与事件 B 同时发生．因此，积事件 AB 发生的概率一定与事件 A，B 发生的概率有关．那么，这种关系会是怎样的呢？

下面我们来讨论一类与积事件有关的特殊问题．

探究

下面两个随机试验各定义了一对随机事件 A 和 B．你觉得事件 A 发生与否会影响事件 B 发生的概率吗？

试验 1：分别抛掷两枚质地均匀的硬币．A ="第一枚硬币正面朝上"．B ="第二枚硬币反面朝上"．

试验 2：一个袋子中装有标号分别是 1，2，3，4 的 4 个球．除标号外没有其他差异．采用有放回方式从袋中依次任意摸出两球．设 A = "第一次摸到球的标号小于 3"．B = "第二次摸到球的标号小于 3"．

分别计算 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$．你有什么发现？

显然，对于试验 1，因为两枚硬币分别抛掷，第一枚硬币的抛掷结果与第二枚硬币的抛掷结果互相不受影响，所以事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率．

对于试验 2，因为是有放回摸球，第一次摸球的结果与第二次摸球的结果互相不受影响，所以事件 A 发生与否也不影响事件 B 发生的概率．

在试验 1 中，用 1 表示硬币"正面朝上"，用 0 表示硬币"反面朝上"，则样本空间为 $\Omega=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$，包含 4 个等可能的样本点．而 $A=\{(1,1),(1,0)\}$，$B=\{(1,0),(0,0)\}$，所以 $AB=\{(1,0)\}$．由古典概型概率计算公式，得

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{1}{4}.$$

于是

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

积事件 AB 的概率 $P(AB)$ 恰好等于 $P(A)$ 与 $P(B)$ 的乘积．

人民教育出版社

人民教育出版社

在试验2中，样本空间 $\Omega=\{(m,\ n)\mid m,\ n\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}\}$，而

$$A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),$$
$$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\},$$
$$B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),$$
$$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2)\},$$
$$AB=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\}.$$

所以

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}.$$

于是也有

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

积事件 AB 的概率 $P(AB)$ 也等于 $P(A)$ 与 $P(B)$ 的乘积.

从上述两个试验的共性中得到启发，我们引入这种事件关系的一般定义：

对任意两个事件 A 与 B，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

成立，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称为独立.

由两个事件相互独立的定义，容易验证必然事件 Ω、不可能事件 $\varnothing$ 都与任意事件相互独立. 这是因为必然事件 Ω 总会发生，不会受任何事件是否发生的影响；同样，不可能事件 $\varnothing$ 总不会发生，也不受任何事件是否发生的影响. 当然，它们也不影响其他事件是否发生.

探究

互为对立的两个事件是非常特殊的一种事件关系. 如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么它们的对立事件是否也相互独立？以有放回摸球试验为例，分别验证 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 是否独立，你有什么发现？

对于 A 与 $\bar{B}$，因为 $A=AB\cup A\bar{B}$，而且 AB 与 $A\bar{B}$ 互斥，所以

$$P(A)=P(AB\cup A\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})$$
$$=P(A)P(B)+P(A\bar{B}).$$

所以

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B}).$$

我们知道，如果三个事件 A，B，C 两两互斥，那么概率加法公式 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$ 成立. 但当三个事件 A，B，C 两两独立时，等式 $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)P(C)$ 一般不成立.

人民教育出版社

人民教育出版社

由事件的独立性定义，A 与 $\bar{B}$ 相互独立.

类似地，可以证明事件 $\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都相互独立.

例 1　一个袋子中有标号分别为 1，2，3，4 的 4 个球，除标号外没有其他差异. 采用不放回方式从中任意摸球两次. 设事件 A = “第一次摸出球的标号小于 3”，事件 B = “第二次摸出球的标号小于 3”. 那么事件 A 与事件 B 是否相互独立?

解：因为样本空间 $\Omega=\{(m,\ n)\mid m,\ n\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ 且\ m\neq n\}$，

$A=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$.

$B=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2)\}$.

所以

$$P(A)=P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

此时 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，因此，事件 A 与事件 B 不独立.

例 2　甲、乙两名射击运动员进行射击比赛，甲的中靶概率为 0.8，乙的中靶概率为 0.9，求下列事件的概率：

(1) 两人都中靶；

(2) 恰好有一人中靶；

(3) 两人都脱靶；

(4) 至少有一人中靶.

分析：设 A = “甲中靶”，B = “乙中靶”. 从要求的概率可知，需要先分别求 A，B 的对立事件 $\bar{A}$，$\bar{B}$ 的概率，并利用 A，B，$\bar{A}$，$\bar{B}$ 构建相应的事件.

解：设 A = “甲中靶”，B = “乙中靶”，则 $\bar{A}$ = “甲脱靶”，$\bar{B}$ = “乙脱靶”. 由于两个人射击的结果互不影响，所以 A 与 B 相互独立，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都相互独立.

由已知可得，$P(A)=0.8$，$P(B)=0.9$，$P(\bar{A})=0.2$，$P(\bar{B})=0.1$.

(1) AB = “两人都中靶”，由事件的独立性定义，得

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.9=0.72.$$

(2) “恰好有一人中靶” $=A\bar{B}\cup\bar{A}B$，且 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互斥，根据概率的加法公式和事件的独立性定义，得

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)$$
$$=0.8\times0.1+0.2\times0.9=0.26.$$

(3) 事件 “两人都脱靶” $=\bar{A}\bar{B}$，所以

人民教育出版社

人民教育出版社

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=(1-0.8)\times(1-0.9)=0.02.$$

(4) 方法 1：事件“至少有一人中靶”$=AB\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B$．且$AB$．$A\bar{B}$与$\bar{A}B$两两互斥．所以

$$\begin{aligned}P(AB\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B)&=P(AB)+P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)\\&=P(AB)+P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)\\&=0.72+0.26=0.98.\end{aligned}$$

方法 2：由于事件“至少有一人中靶”的对立事件是“两人都脱靶”．根据对立事件的性质．得事件“至少有一人中靶”的概率为

$$1-P(\bar{A}\bar{B})=1-0.02=0.98.$$

例 3　甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动．每轮活动由甲、乙各猜一个成语．已知甲每轮猜对的概率为$\frac{3}{4}$．乙每轮猜对的概率为$\frac{2}{3}$．在每轮活动中．甲和乙猜对与否互不影响．各轮结果也互不影响．求“星队”在两轮活动中猜对 3 个成语的概率．

分析：两轮活动猜对 3 个成语．相当于事件“甲猜对 1 个．乙猜对 2 个”、事件“甲猜对 2 个．乙猜对 1 个”的和事件发生．

解：设A_1．A_2分别表示甲两轮猜对 1 个．2 个成语的事件．B_1．B_2分别表示乙两轮猜对 1 个．2 个成语的事件．根据独立性假定．得

$$P(A_1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8},\quad P(A_2)=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

$$P(B_1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9},\quad P(B_2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

设$A=$“两轮活动‘星队’猜对 3 个成语”．则$A=A_1B_2\cup A_2B_1$．且A_1B_2与A_2B_1互斥．A_1与B_2．A_2与B_1分别相互独立．所以

$$\begin{aligned}P(A)=P(A_1B_2)+P(A_2B_1)&=P(A_1)P(B_2)+P(A_2)P(B_1)\\&=\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{9}{16}\times\frac{4}{9}=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

因此，“星队”在两轮活动中猜对 3 个成语的概率是$\frac{5}{12}$．

练习

1. 分别抛掷两枚质地均匀的硬币．设事件$A=$“第 1 枚正面朝上”．事件$B=$“第 2 枚正面朝上”．事件$C=$“两枚硬币朝上的面相同”．A．B．C中哪两个相互独立？
2. 设样本空间$\Omega=\{a,\ b,\ c,\ d\}$含有等可能的样本点．且

$$A=\{a,\ b\},\ B=\{a,\ c\},\ C=\{a,\ d\}.$$

人民教育出版社