8.3.2 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

1. 圆柱、圆锥、圆台的表面积和体积

与多面体的表面积一样，圆柱、圆锥、圆台的表面积也是围成它的各个面的面积和.利用圆柱、圆锥、圆台的展开图（图 8.3-3），可以得到它们的表面积公式：

$S_{圆柱}=2\pi r(r+l)$（r 是底面半径，l 是母线长），

$S_{圆锥}=\pi r(r+l)$（r 是底面半径，l 是母线长），

$S_{圆台}=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$（$r'$，$r$ 分别是上、下底面半径，l 是母线长）.

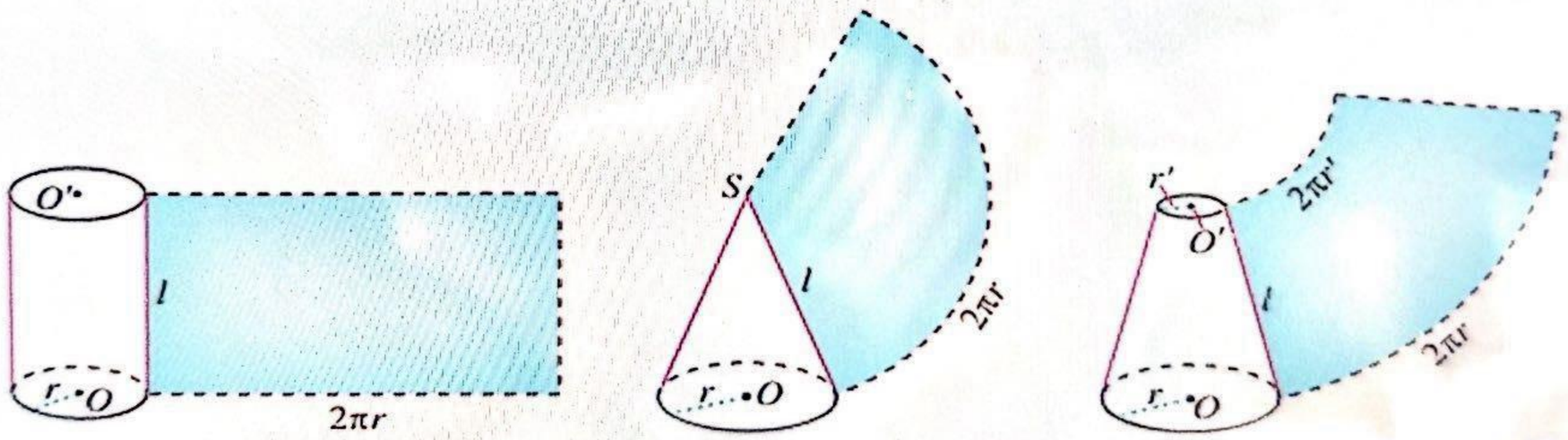


图 8.3-3

人民教育出版社

人民教育出版社

思考

圆柱、圆锥、圆台的表面积公式之间有什么关系？你能用圆柱、圆锥、圆台的结构特征来解释这种关系吗？

我们以前学习过圆柱、圆锥的体积公式，即

$$V_{圆柱}=\pi r^2 h\ (r\text{ 是底面半径，}h\text{ 是高}),$$

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2 h\ (r\text{ 是底面半径，}h\text{ 是高}).$$

由于圆台是由圆锥截成的，因此可以利用圆锥的体积公式推导出圆台的体积公式

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r'^2+r'r+r^2)\ (r',\ r\text{ 分别是上、下底面半径，}h\text{ 是高}).$$

思考

圆柱、圆锥、圆台的体积公式之间有什么关系？结合棱柱、棱锥、棱台的体积公式，你能将它们统一成柱体、锥体、台体的体积公式吗？柱体、锥体、台体的体积公式之间又有怎样的关系？

归纳

$V_{柱体}=Sh$（S 为底面积，h 为柱体高）；

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为锥体高）；

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$（$S'$，$S$ 分别为上、下底面面积，h 为台体高）.

当 $S'=S$ 时，台体变为柱体，台体的体积公式也就是柱体的体积公式；当 $S'=0$ 时，台体变为锥体，台体的体积公式也就是锥体的体积公式.

2. 球的表面积和体积

设球的半径为 R，它的表面积只与半径 R 有关，是以 R 为自变量的函数.

事实上，如果球的半径为 R，那么它的表面积是

$$S_{球}=4\pi R^2.$$

人民教育出版社

人民教育出版社

例 3　如图 8.3-4，某种浮标由两个半球和一个圆柱黏合而成，半球的直径是 0.3 m，圆柱高 0.6 m. 如果在浮标表面涂一层防水漆，每平方米需要0.5 kg 涂料，那么给 1 000 个这样的浮标涂防水漆需要多少涂料？（π 取 3.14）



图 8.3-4

解：一个浮标的表面积为

$$2\pi\times0.15\times0.6+4\pi\times0.15^2=0.847\,8(\mathrm{m}^2),$$

所以给 1 000 个这样的浮标涂防水漆约需涂料

$$0.847\,8\times0.5\times1\,000=423.9(\mathrm{kg}).$$

? 思考

在小学，我们学习了圆的面积公式，你还记得是如何求得的吗？类比这种方法，你能由球的表面积公式推导出球的体积公式吗？

类比利用圆周长求圆面积的方法，我们可以利用球的表面积求球的体积．如图8.3-5，把球 O 的表面分成 n 个小网格，连接球心 O 和每个小网格的顶点，整个球体就被分割成 n 个 “小锥体”.

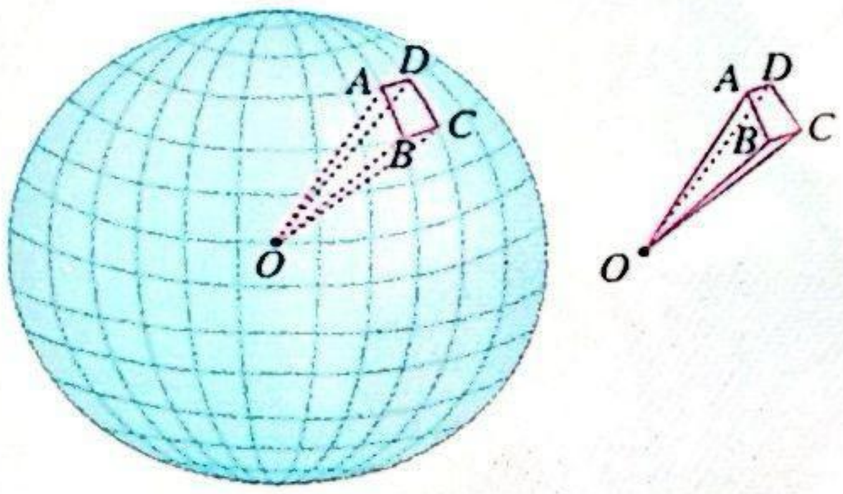


图 8.3-5

当 n 越大，每个小网格越小时，每个 “小锥体” 的底面就越平，“小锥体” 就越近似于棱锥，其高越近似于球半径 R. 设 $O\text{-}ABCD$ 是其中一个 “小锥体”，它的体积

$$V_{O\text{-}ABCD}\approx\frac{1}{3}S_{ABCD}R.$$

由于球的体积就是这 n 个 “小锥体” 的体积之和，而这 n 个 “小锥体” 的底面积之和就是球的表面积. 因此，球的体积

$$V_{球}=\frac{1}{3}S_{球}\,R=\frac{1}{3}\times4\pi R^2\cdot R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

由此，我们得到球的体积公式

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

人民教育出版社

人民教育出版社

例 4　如图 8.3-6，圆柱的底面直径和高都等于球的直径，求球与圆柱的体积之比.

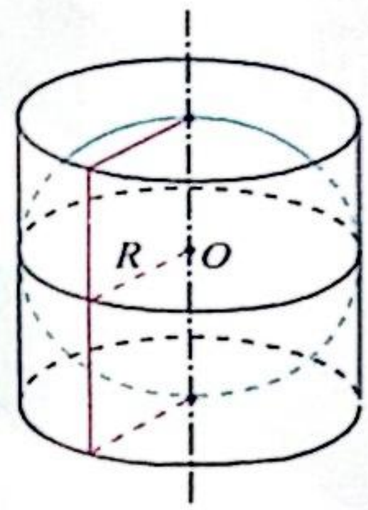


图 8.3-6

解：设球的半径为 R，则圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$.

$$\because \quad V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3,\ V_{圆柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3,$$

$$\therefore \quad V_{球}:V_{圆柱}=\frac{4}{3}\pi R^3:2\pi R^3=\frac{2}{3}.$$

本节我们学习了柱体、锥体、台体、球的表面积与体积的计算方法. 在生产、生活中遇到的物体，往往形状比较复杂，但很多物体都可以看作由这些简单几何体组合而成的，它们的表面积与体积可以利用这些简单几何体的表面积与体积来计算.

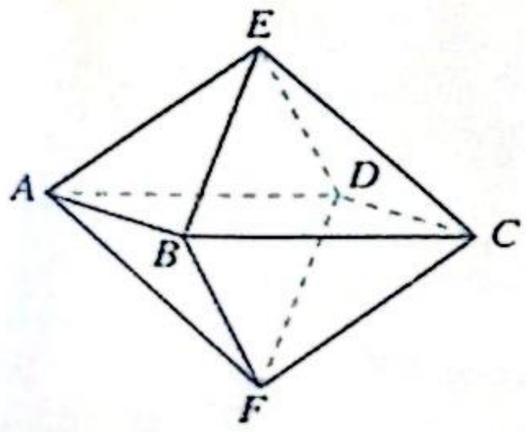
练习

1. 已知圆锥的表面积为 $a\ \mathrm{m}^2$，且它的侧面展开图是一个半圆，求这个圆锥的底面直径.
2. 当一个球的半径满足什么条件时，其体积和表面积的数值相等?
3. 将一个棱长为 6 cm 的正方体铁块磨制成一个球体零件，求可能制作的最大零件的体积.
4. 一个长、宽、高分别是 80 cm，60 cm，55 cm 的水槽中装有 200 000 cm^3 的水，现放入一个直径为 50 cm 的木球. 如果木球的三分之二在水中，三分之一在水上，那么水是否会从水槽中溢出?

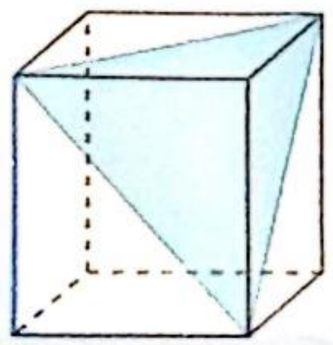
习题 8.3

复习巩固

1. 如图，八面体的每一个面都是正三角形，并且 4 个顶点 A，B，C，D 在同一个平面内. 如果四边形 $ABCD$ 是边长为 30 cm 的正方形，那么这个八面体的表面积是多少?



（第 1 题）


（第 2 题）

2. 如图，将一个长方体沿相邻三个面的对角线截出一个棱锥，求棱锥的体积与剩下的几何体体积的比.

人民教育出版社