

2.3.2 一元二次不等式的基本解法 >>>

分析理解



回到本节开头的问题, 如何解不等式 $0.007x^2 + 0.2x - 50 \leq 0$ 呢?

当 x 变化时, 不等式的左边可以看作 x 的二次函数 $y = 0.007x^2 + 0.2x - 50$. 这样解不等式 $0.007x^2 + 0.2x - 50 \leq 0$ 的问题就可以转化为求二次函数 $y = 0.007x^2 + 0.2x - 50$ 的图像上 $y \leq 0$ 所对应点的 x 的取值范围问题.

二次函数 $y = 0.007x^2 + 0.2x - 50$ 的图像是开口向上的抛物线. 因为 $\Delta = b^2 - 4ac = (0.2)^2 - 4 \times 0.007 \times (-50) = 1.44 > 0$, 所以抛物线与 x 轴有两个交点, 交点的横坐标是方程 $0.007x^2 + 0.2x - 50 = 0$ 的两个解, 解方程 $0.007x^2 + 0.2x - 50 = 0$ 得 $x_1 = -100$, $x_2 = \frac{500}{7}$. 所以图像与 x 轴的交点坐标为 $(-100, 0)$, $(\frac{500}{7}, 0)$. 对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{7}$, 顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, 即 $(-\frac{100}{7}, -\frac{360}{7})$.

故二次函数 $y = 0.007x^2 + 0.2x - 50$ 的简图如图 2-4 所示.

观察图像可知:

当 $y = 0$ 时, 对应抛物线与 x 轴的两个交点, 此时 $x_1 = -100$, $x_2 = \frac{500}{7}$;

当 $y < 0$ 时, 对应抛物线在 x 轴下方的所有点, 此时 x 的取值范围是 $-100 < x < \frac{500}{7}$.

故满足不等式 $0.007x^2 + 0.2x - 50 \leq 0$ 的 x 所在的区间为 $[-100, \frac{500}{7}]$.

考虑到高速公路上的最低速度为 60 km/h, 如果希望该汽车急刹车的停车距离不超过 50 m, 那么其行驶速度的范围是 $[60, \frac{500}{7}]$, 行驶速度的最大值为 $\frac{500}{7} \approx 71$ (km/h).

抽象概括



一般地, 使一元二次不等式成立的值叫作这个一元二次不等式的解.

笔记

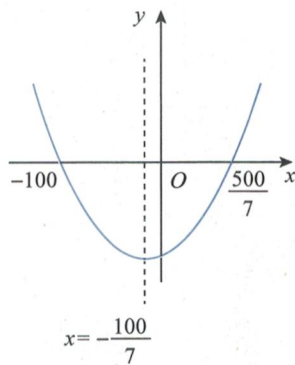


图 2-4

一元二次不等式的所有解组成的集合,叫作这个一元二次不等式的解集.

上面的情形表明,二次函数图像的开口方向及其与 x 轴的交点坐标,可以确定其对应的一元二次不等式的解集.

例 利用二次函数的图像解下列一元二次不等式.

(1) $-x^2+3x+4<0$; (2) $x^2-2x+3>0$.

解 (1) $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-1)\times4=25>0$, 所以函数 $y=-x^2+3x+4$ 的图像与 x 轴有两个交点. 解方程 $-x^2+3x+4=0$ 可得, $x_1=-1, x_2=4$.

函数 $y=-x^2+3x+4$ 的图像是开口向下的抛物线, 与 x 轴的交点坐标是 $(-1, 0), (4, 0)$, 函数 $y=-x^2+3x+4$ 的图像如图 2-5 所示.

观察图像可得, 不等式 $-x^2+3x+4<0$ 的解集是 $(-\infty, -1)\cup(4, +\infty)$.

(2) $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$, 所以函数 $y=x^2-2x+3$ 的图像与 x 轴无交点.

函数 $y=x^2-2x+3$ 的图像是开口向上的抛物线, 与 x 轴无交点, 其简图如图 2-6 所示.

观察图像可得, 不等式 $x^2-2x+3>0$ 的解集为 \mathbf{R} .

特别提示

例 (1) 中, 注意到不等式 $-x^2+3x+4<0\iff x^2-3x-4>0$, 从而可将问题转化成解不等式 $x^2-3x-4>0$, 即当一元二次不等式的二次项系数为负数时, 可以利用不等式的性质将不等式化成二次项系数为正数的一元二次不等式, 再求解.

探究发现



通过上面的分析, 发现二次函数的图像、一元二次方程的解、一元二次不等式的解集之间有着密切的联系, 可以总结成表 2-5.

表 2-5

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			

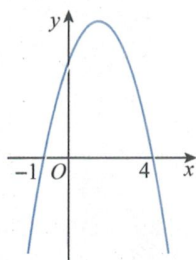


图 2-5

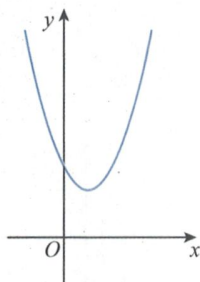


图 2-6

笔记

续表

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
一元二次方程的解 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$		有两个不相等的实数解 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	有两个相等的实数解 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实数解
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	\mathbf{R}
	$ax^2 + bx + c \geq 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x \leq x_1 \text{ 或 } x \geq x_2\}$	\mathbf{R}	\mathbf{R}
	$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	\emptyset	\emptyset
	$ax^2 + bx + c \leq 0$ ($a > 0$)	$\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$	$\{x \mid x = -\frac{b}{2a}\}$	\emptyset

合作交流

表 2-5 中要求 $a > 0$ ，如果 $a < 0$ ，应该怎样分析呢？请结合具体的例子进行思考，并将你的发现与同学进行交流讨论。

抽象概括

一般地，与二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 对应的一元二次不等式有四种情形，分别是 $ax^2 + bx + c > 0$ ， $ax^2 + bx + c \geq 0$ ， $ax^2 + bx + c < 0$ ， $ax^2 + bx + c \leq 0$ 。利用二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图像求解相应的一元二次不等式，可以分为三步。

第一步：确定相应的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，从而确定二次函数的图像与 x 轴的相交情况；如果有交点，则利用方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 解出交点的横坐标。

第二步：画出二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的简图。

第三步：观察简图，写出不等式的解集。

随堂练习

利用二次函数的图像解下列一元二次不等式。

(1) $x^2 - 9 > 0$;

(2) $x^2 + 4x < 0$;

(3) $x^2 \leq 4$;



笔记

$$\begin{aligned}
 (4) \quad x^2 - 3x - 4 > 0; & \quad (5) \quad x^2 - x - 2 \leq 0; & \quad (6) \quad -x^2 - 3x < 0; \\
 (7) \quad -x^2 + 5x - 6 < 0; & \quad (8) \quad -3x^2 + 2x - 1 > 0.
 \end{aligned}$$

2.3.3 特殊类型一元二次不等式的解法 >>>

分析理解



观察下列不等式:

$$(x+1)(x-3) < 0; \quad \text{①}$$

$$(x+1)(x-3) > 0; \quad \text{②}$$

$$(x+1)(x-3) \leq 0; \quad \text{③}$$

$$(x+1)(x-3) \geq 0. \quad \text{④}$$

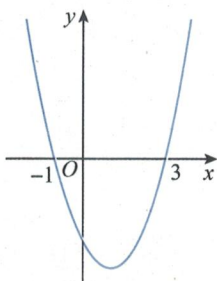


图 2-7

以上四个不等式对应的二次函数为 $y = (x+1)(x-3)$, 对应的一元二次方程为 $(x+1)(x-3) = 0$. 其解为 $x_1 = -1, x_2 = 3$. 二次函数 $y = (x+1)(x-3)$ 的图像与 x 轴有两个交点 $(-1, 0), (3, 0)$.

二次函数 $y = (x+1)(x-3)$ 的简图如图 2-7 所示.

结合二次函数 $y = (x+1)(x-3)$ 的简图, 我们可以得到以下结论.

(1) 不等式 $(x+1)(x-3) < 0$ 的解在方程 $(x+1)(x-3) = 0$ 的两解之间, 解集为 $(-1, 3)$;

(2) 不等式 $(x+1)(x-3) > 0$ 的解在方程 $(x+1)(x-3) = 0$ 的两解之外, 解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$;

(3) 不等式 $(x+1)(x-3) \leq 0$ 的解在方程 $(x+1)(x-3) = 0$ 的两解之间, 解集为 $[-1, 3]$;

(4) 不等式 $(x+1)(x-3) \geq 0$ 的解在方程 $(x+1)(x-3) = 0$ 的两解之外, 解集为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

抽象概括



一般地, 一元二次方程 $(x-p)(x-q) = 0$ (其中 p, q 为实数, 并且 $p < q$) 有两个不相等的实数解 $x_1 = p, x_2 = q$, 二次函数 $y = (x-p)(x-q)$ 的简图如图 2-8 所示.

观察二次函数 $y = (x-p)(x-q)$ 的简图, 可知下列结论成立.

(1) 不等式 $(x-p)(x-q) < 0$ 的解集为 (p, q) ;

(2) 不等式 $(x-p)(x-q) > 0$ 的解集为 $(-\infty, p) \cup (q, +\infty)$;

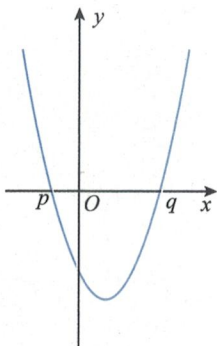


图 2-8