

2. 角度与弧度互化.

(1) $135^\circ =$ _____; (2) $-225^\circ =$ _____;

(3) $-300^\circ =$ _____; (4) $\frac{2}{3}\pi =$ _____;

(5) $\frac{5\pi}{4} =$ _____; (6) $-3\pi =$ _____.

3. (1) 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 α 是第 _____ 象限角, $\frac{\alpha}{2}$ 是第 _____ 象限角;

(2) 若 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 α 是第 _____ 象限角, $\frac{\alpha}{2}$ 是第 _____ 象限角.

4. 三角形的三个内角的度数之比为 $1:2:3$, 求最小内角的弧度数.

5. 经过 1 h, 钟表的时针和分针各转了多少度? 分别是多少弧度?

水平二

1. 已知扇形的面积为 2, 扇形的圆心角的弧度数为 4, 求该扇形的周长.

2. 要在半径为 100 cm 的圆金属板上截取一块扇形板, 使它的弧长为 112 cm, 求该弧所对的圆心角的弧度数与角度数. (结果精确到 1°)

3. 已知长 50 cm 的弧所对的圆心角为 200° , 求该弧所在圆的半径. (结果精确到 1 cm)

5.3 任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数

知识回顾

初中我们在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中定义了锐角 α 的正弦、余弦和正切, 如图 5-11 所示.

$$\text{正弦: } \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\angle \alpha \text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

$$\text{余弦: } \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\angle \alpha \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}.$$

$$\text{正切: } \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\angle \alpha \text{ 的对边}}{\angle \alpha \text{ 的邻边}}.$$

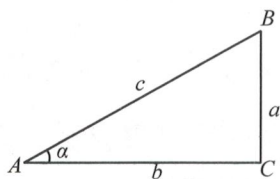


图 5-11

问题提出

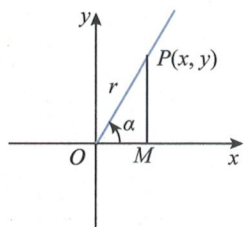


图 5-12

现在我们将一个锐角 α 放入平面直角坐标系中, 使得顶点与原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 如图 5-12 所示. 已知点 $P(x, y)$ 是锐角 α 终边上的任意一点, 点 P 与原点 O 的距离 $OP=r(r>0)$, 你能利用锐角三角函数的定义计算出锐角 α 所对应的三角函数值吗?

分析理解



过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M , 则线段 OM 的长度为 x , 线段 MP 的长度为 y .

在 $\text{Rt}\triangle OMP$ 中, 根据勾股定理可得, $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$.

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{y}{x}.$$

抽象概括



在弧度制下, 我们已将 α 的范围扩展到了全体实数.

一般地, 如图 5-13 所示, 当 α 为任意角时, 点 $P(x, y)$ 是 α 的终边上异于原点的任意一点, 点 P 到原点的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 我们仍然将 α 的正弦、余弦、正切分别定义如下.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

注意: 当 α 的终边不在 y 轴上时, $\tan \alpha$ 才有意义.

对于每一个确定的 α , 其正弦、余弦及正切都分别对应一个确定的比值, 因此, 正弦、余弦及正切都是以 α 为自变量的函数, 分别叫作正弦函数、余弦函数及正切函数.

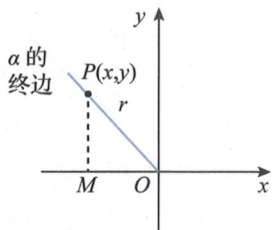


图 5-13

当点 P 的横坐标 $x=0$ 时, α 的终边在 y 轴上, 此时 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\frac{y}{x} = \tan \alpha$ 无意义. 除此之外, 对于确定的 α , 三个函数都有意义.

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数, 通常记为:

正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R};$

余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R};$

正切函数 $y = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}).$

例 1 如图 5-14 所示, 已知 α 的终边经过点 $P(3, -4)$, 求 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值.

解 由已知有

$$x=3, y=-4,$$

则

$$r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$$

于是

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = -\frac{4}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{5},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}.$$

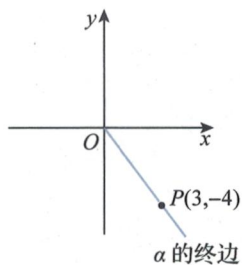


图 5-14

随堂练习



1. (1) 正弦函数表示为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$, $x \in \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 余弦函数表示为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$, $x \in \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 正切函数表示为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$, $x \neq \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若 α 的终边过点 $(-8, 6)$, 则 $\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, $\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 若 α 的终边过点 $(5, 12)$, 则 $\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, $\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

问题提出



从 α 的正弦、余弦和正切的定义与实例可知, 任意角的正弦值、余弦值和正切值在不同的象限有不同的符号. 下面我们来研究各个象限内, 任意角的正弦值、余弦值和正切值的符号的规律.

分析理解



以第二象限角为例, 根据任意角的正弦、余弦和正切的定义, 试分析它们在第二象限的符号情况.

因为 α 的终边在第二象限, 任取终边上异于原点的一点 $P(x, y)$, 有

$$x < 0, y > 0, OP = r > 0.$$

根据任意角的正弦、余弦和正切的定义可知,

笔记