

随堂练习



(1) 点 $P(1, -2)$ 到直线 $4x - 3y - 5 = 0$ 的距离为 _____.

(2) 点 $Q(-1, 1)$ 到直线 $3x - 4y = 0$ 的距离为_____.

(3) 点 $P(1, 3)$ 到直线 $x+2=0$ 的距离为 _____.

(4) 点 $M(-5, 2)$ 到直线 $y=3$ 的距离为 _____.

(5) 点 $A(6, a)$ 到直线 $3x - 4y - 3 = 0$ 的距离为 5, 则 a 的值为

水平一

- ## 水平二

- ## 6.8 圆的方程 >>>>>>>>>

在中华民族传统文化中圆是一种重要的形态，它象征着“圆满”和“饱满”。在我们日常生活中，圆形的物体随处可见，如天上的太阳、汽车的轮胎、盘子、艺术体操运动员手中的圆环等。人们之所以制造出那么多的圆形物体，

6.8.1

问题提出

我们
那么圆的

分析理解

我们
圆心和

例

径确定”

圆心的

 $(x-1)$

是圆上

四

३

3

的坐;

心，

抽象

叫作

除了追求视觉上的美观外,更重要的是圆具有很多特别有用的性质.

6.8.1 圆的标准方程 >>>

问题提出



我们知道,点可以用坐标来表示,直线可以用二元一次方程来表示,那么圆的代数形式是什么?

分析理解



我们知道,当圆心和半径确定时,圆的大小和位置就确定了.因此,圆心和半径是确定圆的最基本的要素.

例如,圆心为 $C(1, 2)$, 半径为 3 的圆,圆的大小和位置都被圆心和半径确定了.设 $M(x, y)$ 为圆上任意一点,根据圆的意义,圆上任意一点到圆心的距离为 3, 则 $MC = 3$, 即 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 3$, 化简可得 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

一般地,如图 6-28 所示,设圆心为 $C(a, b)$, 半径为 r , 点 $M(x, y)$ 是圆上任意一点,则点 M 满足

$$CM = r.$$

由两点间的距离公式得 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$.

两边平方可得

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

若点 $M(x, y)$ 在圆上,则点 M 的坐标满足上面的方程,反之若点 M 的坐标满足上面的方程,则点 M 到点 C 的距离为 r , 即点 M 在以点 C 为圆心, r 为半径的圆上.这样圆和方程就形成了对应关系.

抽象概括



一般地,我们把方程

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

叫作以 (a, b) 为圆心,以 r 为半径的圆的方程,称为圆的标准方程.

特别地,当 $a=0, b=0$ 时,即圆心为原点时,圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

笔记

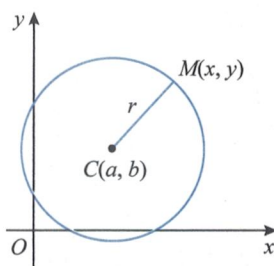


图 6-28

概念

圆的标准方程

例 1 根据下列圆的方程,确定圆心坐标和半径.

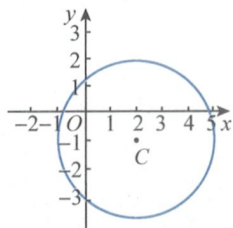


图 6-29

$$(1) (x-2)^2 + y^2 = 9;$$

$$(2) (x+1)^2 + (y-3)^2 = 10.$$

解 (1) 圆心坐标为(2, 0), 半径 $r=3$.

(2) 圆心坐标为(-1, 3), 半径 $r=\sqrt{10}$.

例 2 写出圆心为 $C(2, -1)$, 半径 $r=3$ 的圆的方程, 并作图.

解 将 $a=2$, $b=-1$, $r=3$ 代入圆的标准方程中, 得

$$(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 3^2.$$

整理得圆的标准方程为 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, 如图 6-29 所示.

例 3 求以点 $C(1, 2)$ 为圆心且过点 $A(-1, 0)$ 的圆的方程, 并判断点 $M(-3, 3)$, $N(2, 1)$ 和 $Q(3, 0)$ 是在圆上、圆内还是在圆外.

分析 一个点与圆的位置关系, 取决于该点到圆心的距离 d 与圆的半径 r 之间的关系. 点在圆外 $\Leftrightarrow d > r$; 点在圆上 $\Leftrightarrow d = r$; 点在圆内 $\Leftrightarrow d < r$.

解 半径 $r = CA = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

分别计算 $M(-3, 3)$, $N(2, 1)$ 和 $Q(3, 0)$ 到圆心的距离, 得

$$CM = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{17} > 2\sqrt{2}, \text{ 所以点 } M \text{ 在圆外};$$

$$CN = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2} < 2\sqrt{2}, \text{ 所以点 } N \text{ 在圆内};$$

$$CQ = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 所以点 } Q \text{ 在圆上}.$$

笔记

随堂练习



1. 求出下列各圆的圆心和半径.

$$(1) x^2 + (y-1)^2 = 3;$$

$$(2) (x+2)^2 + (y+3)^2 = 9;$$

$$(3) x^2 + y^2 - 5 = 0.$$

2. 根据下列条件写出圆的标准方程.

$$(1) \text{ 圆心 } (-1, 2), \text{ 半径为 } \sqrt{3};$$

$$(2) \text{ 圆心为 } (3, 1) \text{ 且过坐标原点};$$

$$(3) \text{ 圆心为直线 } x-y=0 \text{ 和 } x-2y-6=0 \text{ 的交点, 半径为 } 5.$$