

## 练习

1. 已知下列直线的倾斜角, 求直线的斜率:

(1)  $\alpha = 30^\circ$ ; (2)  $\alpha = 45^\circ$ ; (3)  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ; (4)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ .

2. 已知下列直线的斜率, 求直线的倾斜角:

(1)  $k = 0$ ; (2)  $k = \sqrt{3}$ ; (3)  $k = -\sqrt{3}$ ; (4)  $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

3. 求经过下列两点的直线的斜率, 并判断其倾斜角是锐角还是钝角:

(1)  $C(18, 8), D(4, -4)$ ; (2)  $P(0, 0), Q(-1, 3)$ .

4. 已知  $a, b, c$  是两两不等的实数, 求经过下列两点的直线的倾斜角:

(1)  $A(a, c), B(b, c)$ ;  
 (2)  $C(a, b), D(a, c)$ ;  
 (3)  $P(b, b+c), Q(a, c+a)$ .

5. 经过  $A(0, 2), B(-1, 0)$  两点的直线的方向向量为  $(1, k)$ , 求  $k$  的值.

## 2.1.2 两条直线平行和垂直的判定

为了在平面直角坐标系中用代数方法表示直线, 我们从确定直线位置的几何要素出发, 引入直线的倾斜角, 再利用倾斜角与直线上点的坐标关系引入直线的斜率, 从数的角度刻画了直线相对于  $x$  轴的倾斜程度, 并导出了用直线上任意两点的坐标计算斜率的公式, 从而把几何问题转化为代数问题. 下面, 我们通过直线的斜率判断两条直线的位置关系.

### 思考

我们知道, 平面中两条直线有两种位置关系: 相交、平行. 当两条直线  $l_1$  与直线  $l_2$  平行时, 它们的斜率  $k_1$  与  $k_2$  满足什么关系?

若没有特别说明, 说“两条直线  $l_1, l_2$ ”时, 指两条不重合的直线.

如图 2.1-7, 若  $l_1 // l_2$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的倾斜角  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  相等, 由  $\alpha_1 = \alpha_2$ , 可得  $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ , 即  $k_1 = k_2$ . 因此,

$$\text{若 } l_1 // l_2, \text{ 则 } k_1 = k_2.$$

反之, 当  $k_1 = k_2$  时,  $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ , 由倾斜角的取值范围及正切函数的单调性可知,  $\alpha_1 = \alpha_2$ , 因此  $l_1 // l_2$ .

于是, 对于斜率分别为  $k_1, k_2$  的两条直线  $l_1, l_2$ , 有

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

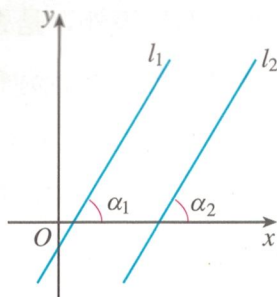


图 2.1-7

显然, 当  $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$  时, 直线的斜率不存在, 此时  $l_1 // l_2$ .

若直线  $l_1, l_2$  重合, 此时仍然有  $k_1 = k_2$ . 用斜率证明三点共线时, 常常用到这个结论.

**例 2** 已知  $A(2, 3), B(-4, 0), P(-3, 1), Q(-1, 2)$ , 试判断直线  $AB$  与  $PQ$  的位置关系, 并证明你的结论.

**解:** 如图 2.1-8, 由已知可得

$$\text{直线 } BA \text{ 的斜率 } k_{BA} = \frac{3-0}{2-(-4)} = \frac{1}{2},$$

$$\text{直线 } PQ \text{ 的斜率 } k_{PQ} = \frac{2-1}{-1-(-3)} = \frac{1}{2}.$$

因为  $k_{BA} = k_{PQ}$ , 所以直线  $AB // PQ$ .

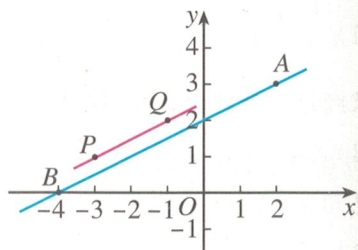


图 2.1-8

**例 3** 已知四边形  $ABCD$  的四个顶点分别为  $A(0, 0), B(2, -1), C(4, 2), D(2, 3)$ , 试判断四边形  $ABCD$  的形状, 并给出证明.

**解:** 如图 2.1-9, 由已知可得

$$AB \text{ 边所在直线的斜率 } k_{AB} = -\frac{1}{2},$$

$$CD \text{ 边所在直线的斜率 } k_{CD} = -\frac{1}{2},$$

$$BC \text{ 边所在直线的斜率 } k_{BC} = \frac{3}{2},$$

$$DA \text{ 边所在直线的斜率 } k_{DA} = \frac{3}{2}.$$

因为  $k_{AB} = k_{CD}, k_{BC} = k_{DA}$ , 所以  $AB // CD, BC // DA$ .

因此四边形  $ABCD$  是平行四边形.

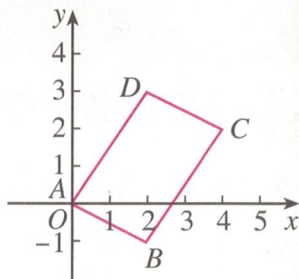


图 2.1-9

显然, 当两条直线相交时, 它们的斜率不相等; 反之, 当两条直线的斜率不相等时, 它们相交. 在相交的位置关系中, 垂直是最特殊的情形. 当直线  $l_1, l_2$  垂直时, 它们的斜率除了不相等外, 是否还有特殊的数量关系?

设两条直线  $l_1, l_2$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 则直线  $l_1, l_2$  的方向向量分别是  $a = (1, k_1), b = (1, k_2)$ , 于是

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 1 \times 1 + k_1 k_2 = 0, \text{ 即 } k_1 k_2 = -1.$$

也就是说,  $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$ .

当直线  $l_1$  或  $l_2$  的倾斜角为  $90^\circ$  时, 若  $l_1 \perp l_2$ , 则另一条直线的倾斜角为  $0^\circ$ ; 反之亦然.

由上我们得到, 如果两条直线都有斜率, 且它们互相垂直, 那么它们的斜率之积等于



-1; 反之, 如果两条直线的斜率之积等于-1, 那么它们互相垂直. 即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

**例 4** 已知  $A(-6, 0)$ ,  $B(3, 6)$ ,  $P(0, 3)$ ,  $Q(6, -6)$ , 试判断直线  $AB$  与  $PQ$  的位置关系.

**解:** 直线  $AB$  的斜率  $k_{AB} = \frac{2}{3}$ ,

直线  $PQ$  的斜率  $k_{PQ} = -\frac{3}{2}$ .

因为  $k_{AB} k_{PQ} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ , 所以直线  $AB \perp PQ$ .

**例 5** 已知  $A(5, -1)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(2, 3)$  三点, 试判断  $\triangle ABC$  的形状.

**分析:** 如图 2.1-10, 猜想  $AB \perp BC$ ,  $\triangle ABC$  是直角三角形.

**解:** 边  $AB$  所在直线的斜率  $k_{AB} = -\frac{1}{2}$ , 边  $BC$  所在直线的斜率  $k_{BC} = 2$ .

由  $k_{AB} k_{BC} = -1$ , 得  $AB \perp BC$ , 即  $\angle ABC = 90^\circ$ .

所以  $\triangle ABC$  是直角三角形.

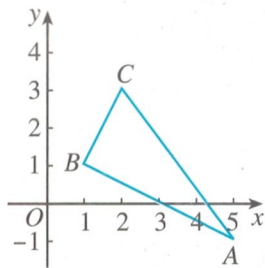


图 2.1-10

## 练习

1. 判断下列各对直线是否平行或垂直:

(1) 经过  $A(2, 3)$ ,  $B(-1, 0)$  两点的直线  $l_1$ , 与经过点  $P(1, 0)$  且斜率为 1 的直线  $l_2$ ;

(2) 经过  $C(3, 1)$ ,  $D(-2, 0)$  两点的直线  $l_3$ , 与经过点  $M(1, -4)$  且斜率为 -5 的直线  $l_4$ .

2. 试确定  $m$  的值, 使过  $A(m, 1)$ ,  $B(-1, m)$  两点的直线与过  $P(1, 2)$ ,  $Q(-5, 0)$  两点的直线:

(1) 平行; (2) 垂直.

## 习题 2.1



### 复习巩固

1. 已知直线斜率的绝对值等于 1, 求直线的倾斜角.

2. 已知四边形  $ABCD$  的四个顶点是  $A(2, 3)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(-1, -2)$ ,  $D(-2, 2)$ , 求四边形  $ABCD$  的四条边所在直线的斜率.