

3.2.2 奇偶性

前面我们用符号语言精确地描述了函数图象在定义域的某个区间上“上升”（或“下降”）的性质. 下面继续研究函数的其他性质.

画出并观察函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=2-|x|$ 的图象 (图 3.2-6), 你能发现这两个函数图象有什么共同特征吗?

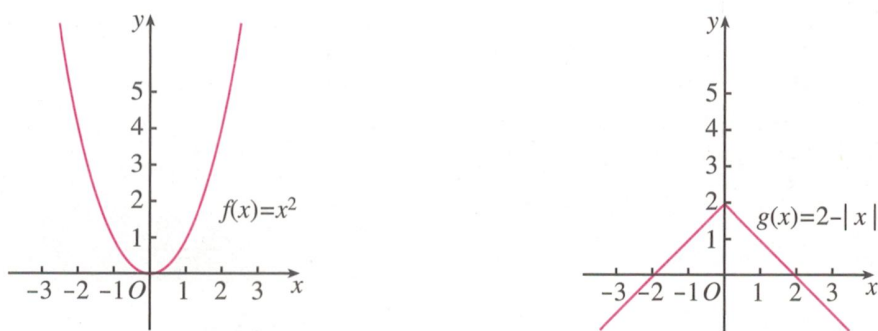


图 3.2-6

可以发现, 这两个函数的图象都关于 y 轴对称.

探究

类比函数单调性, 你能用符号语言精确地描述“函数图象关于 y 轴对称”这一特征吗?

不妨取自变量的一些特殊值, 观察相应函数值的情况, 如表 3.2-1.

表 3.2-1

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)=x^2$...	9	4	1	0	1	4	9	...
$g(x)=2- x $...	-1	0	1	2	1	0	-1	...

可以发现, 当自变量取一对相反数时, 相应的两个函数值相等.

例如, 对于函数 $f(x)=x^2$, 有

$$f(-3)=9=f(3);$$

$$f(-2)=4=f(2);$$

$$f(-1)=1=f(1).$$

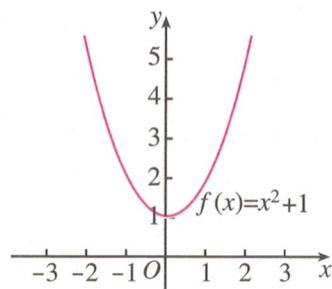
实际上, $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,

这时称函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数.

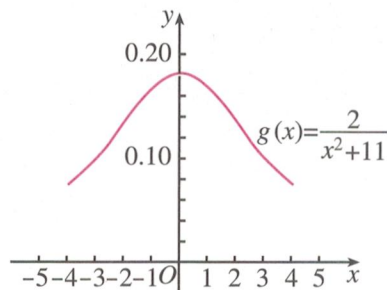
请你仿照这个过程,
说明函数 $g(x)=2-|x|$
也是偶函数.

一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\forall x \in D$, 都有一 $x \in D$, 且 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做**偶函数** (even function).

例如, 函数 $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{2}{x^2 + 11}$ 都是偶函数, 它们的图象分别如图 3.2-7 (1)(2) 所示.



(1)



(2)

图 3.2-7

探究

观察函数 $f(x) = x$ 和 $g(x) = \frac{1}{x}$ 的图象 (图 3.2-8), 你能发现这两个函数图象有什么共同特征吗? 你能用符号语言精确地描述这一特征吗?

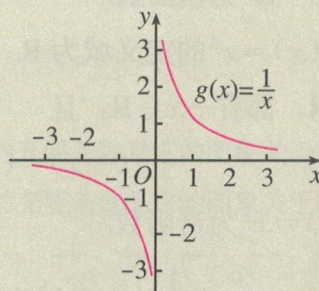
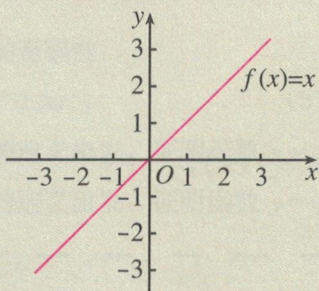


图 3.2-8

可以发现, 两个函数的图象都关于原点成中心对称图形. 为了用符号语言描述这一特征, 不妨取自变量的一些特殊值, 看相应函数值的情况, 请完成表 3.2-2.

表 3.2-2

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x) = x$
$g(x) = \frac{1}{x}$

可以发现, 当自变量 x 取一对相反数时, 相应的函数值 $f(x)$ 也是一对相反数.

例如, 对于函数 $f(x)=x$, 有

$$f(-3)=-3=-f(3);$$

$$f(-2)=-2=-f(2);$$

$$f(-1)=-1=-f(1).$$

实际上, $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x)=-x=-f(x)$. 这时称函数 $f(x)=x$ 为奇函数.

一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\forall x \in D$, 都有一 $x \in D$, 且 $f(-x)=-f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做**奇函数** (odd function).

请你仿照这个过程,
说明函数 $g(x)=\frac{1}{x}$ 也是奇函数.

例 6 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^4$; (2) $f(x)=x^5$;

(3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; (4) $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

解: (1) 函数 $f(x)=x^4$ 的定义域为 \mathbf{R} .

因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有一 $x \in \mathbf{R}$, 且

$$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=x^4$ 为偶函数.

(2) 函数 $f(x)=x^5$ 的定义域为 \mathbf{R} .

因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有一 $x \in \mathbf{R}$, 且

$$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=x^5$ 为奇函数.

(3) 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$.

因为 $\forall x \in \{x|x \neq 0\}$, 都有一 $x \in \{x|x \neq 0\}$, 且

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 为奇函数.

(4) 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$.

因为 $\forall x \in \{x|x \neq 0\}$, 都有一 $x \in \{x|x \neq 0\}$, 且

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为偶函数.

奇偶性是函数在它的
定义域上的整体性质, 所
以判断函数的奇偶性应先
明确它的定义域.

思考

- (1) 判断函数 $f(x)=x^3+x$ 的奇偶性.
- (2) 图 3.2-9 是函数 $f(x)=x^3+x$ 图象的一部分, 你能根据 $f(x)$ 的奇偶性画出它在 y 轴左边的图象吗?
- (3) 一般地, 如果知道 $y=f(x)$ 为偶 (奇) 函数, 那么我们可以怎样简化对它的研究?

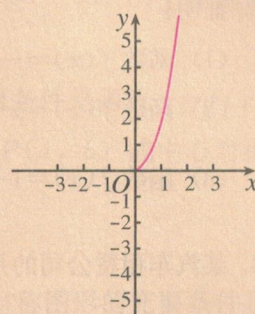
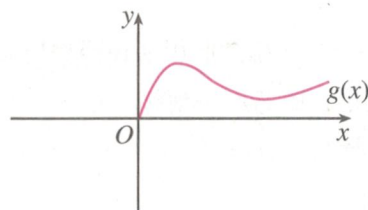
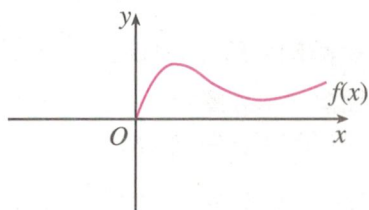


图 3.2-9

练习

1. 已知 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 试将下图补充完整.



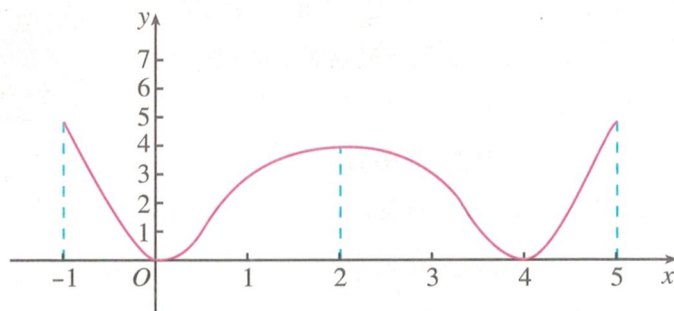
(第 1 题)

2. 判断下列函数的奇偶性:
 - (1) $f(x)=2x^4+3x^2$;
 - (2) $f(x)=x^3-2x$.
3. (1) 从偶函数的定义出发, 证明函数 $y=f(x)$ 是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称;
 (2) 从奇函数的定义出发, 证明函数 $y=f(x)$ 是奇函数的充要条件是它的图象关于原点对称.

习题 3.2

复习巩固

1. 根据下图说出函数的单调区间及在每一单调区间上的单调性.



(第 1 题)