

6.3 二项式定理

上一节学习了排列数公式和组合数公式，本节我们用它们解决一个在数学上有着广泛应用的 $(a+b)^n$ 展开的问题。

6.3.1 二项式定理

探究

我们知道，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

- (1) 观察以上展开式，分析其运算过程，你能发现什么规律？
- (2) 根据你发现的规律，你能写出 $(a+b)^4$ 的展开式吗？
- (3) 进一步地，你能写出 $(a+b)^n$ 的展开式吗？

我们先来分析 $(a+b)^2$ 的展开过程. 根据多项式乘法法则，

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

可以看到， $(a+b)^2$ 是2个 $(a+b)$ 相乘，只要从一个 $(a+b)$ 中选一项（ a 或 b ），再从另一个 $(a+b)$ 中选一项（ a 或 b ），相乘就得到展开式的一项. 于是，由分步乘法计数原理，在合并同类项之前， $(a+b)^2$ 的展开式共有 $C_2^1 \times C_2^1 = 2^2$ 项，而且每一项都是 $a^{2-k}b^k$ （ $k=0, 1, 2$ ）的形式.

下面我们再来分析一下形如 $a^{2-k}b^k$ 的同类项的个数.

当 $k=0$ 时， $a^{2-k}b^k = a^2$ ，这是由2个 $(a+b)$ 中都不选 b 得到的. 因此， a^2 出现的次数相当于从2个 $(a+b)$ 中取0个 b （都取 a ）的组合数 C_2^0 ，即 a^2 只有1个.

当 $k=1$ 时， $a^{2-k}b^k = ab$ ，这是由1个 $(a+b)$ 中选 a ，另1个 $(a+b)$ 中选 b 得到的. 由于 b 选定后， a 的选法也随之确定，因此， ab 出现的次数相当于从2个 $(a+b)$ 中取1个 b 的组合数 C_2^1 ，即 ab 共有2个.

当 $k=2$ 时， $a^{2-k}b^k = b^2$ ，这是由2个 $(a+b)$ 中都选 b 得到的. 因此， b^2 出现的次数相当于从2个 $(a+b)$ 中取2个 b 的组合数 C_2^2 ，即 b^2 只有1个.

由上述分析可以得到

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2.$$

思考

仿照上述过程, 你能利用计数原理, 写出 $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ 的展开式吗?

从上述对具体问题的分析得到启发, 对于任意正整数 n , 我们有如下猜想:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n, \quad n \in \mathbf{N}^*. \quad (1)$$

下面我们对上述猜想的正确性予以说明.

由于 $(a+b)^n$ 是 n 个 $(a+b)$ 相乘, 每个 $(a+b)$ 在相乘时有两种选择, 选 a 或 b , 而且每个 $(a+b)$ 中的 a 或 b 都选定后, 将它们相乘才能得到展开式的一项. 因此, 由分步乘法计数原理可知, 在合并同类项之前, $(a+b)^n$ 的展开式共有 2^n 项, 其中每一项都是 $a^{n-k} b^k$ ($k=0, 1, \cdots, n$) 的形式.

对于每个 k ($k=0, 1, 2, \cdots, n$), 对应的项 $a^{n-k} b^k$ 是由 $(n-k)$ 个 $(a+b)$ 中选 a , 另外 k 个 $(a+b)$ 中选 b 得到的. 由于 b 选定后, a 的选法也随之确定, 因此, $a^{n-k} b^k$ 出现的次数相当于从 n 个 $(a+b)$ 中取 k 个 b 的组合数 C_n^k . 这样, $(a+b)^n$ 的展开式中, $a^{n-k} b^k$ 共有 C_n^k 个, 将它们合并同类项, 就可以得到上述二项展开式.

公式 (1) 叫做 **二项式定理** (binomial theorem), 右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的 **二项展开式**, 其中各项的系数 C_n^k ($k=0, 1, 2, \cdots, n$) 叫做 **二项式系数**. 式中的 $C_n^k a^{n-k} b^k$ 叫做二项展开式的 **通项**, 用 T_{k+1} 表示, 即通项为展开式的第 $k+1$ 项:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

在二项式定理中, 若设 $a=1$, $b=x$, 则得到公式:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n.$$

例 1 求 $(x + \frac{1}{x})^6$ 的展开式.

解: 根据二项式定理,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 &= (x + x^{-1})^6 \\ &= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 x^{-1} + C_6^2 x^4 x^{-2} + C_6^3 x^3 x^{-3} + C_6^4 x^2 x^{-4} + C_6^5 x^1 x^{-5} + C_6^6 x^{-6} \\ &= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + 15x^{-2} + 6x^{-4} + x^{-6}. \end{aligned}$$

例 2 (1) 求 $(1+2x)^7$ 的展开式的第 4 项的系数;

(2) 求 $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中 x^2 的系数.

解: (1) $(1+2x)^7$ 的展开式的第 4 项是

$$T_{3+1} = C_7^3 \times 1^{7-3} \times (2x)^3$$

$(1+2x)^7$ 的展开式的第 4 项的二项式系数是 $C_7^3=35$. 一个二项展开式的某一项的二项式系数与这一项的系数是两个不同的概念.

$$=C_7^3 \times 2^3 x^3 = 35 \times 8 \times x^3 \\ = 280x^3.$$

因此, 展开式第 4 项的系数是 280.

(2) $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式的通项是

$$C_6^k (2\sqrt{x})^{6-k} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = (-1)^k 2^{6-k} C_6^k x^{3-k}.$$

根据题意, 得

$$3-k=2,$$

$$k=1.$$

因此, x^2 的系数是

$$(-1) \times 2^5 \times C_6^1 = -192.$$

练习

1. 写出 $(p+q)^5$ 的展开式.

2. 求 $(2a+3b)^6$ 的展开式的第 3 项.

3. 写出 $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式的第 $r+1$ 项.

4. $(x-1)^{10}$ 的展开式的第 6 项的系数是 ().

(A) C_{10}^6

(B) $-C_{10}^6$

(C) C_{10}^5

(D) $-C_{10}^5$

5. 在 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ 的展开式中, 含 x^4 的项的系数是_____.

6.3.2 二项式系数的性质

$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k, \dots, C_n^n$$

有很多有趣的性质, 而且我们可以从不同角度进行研究.

探究

用计算工具计算 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数, 并填入表 6.3-1.

表 6.3-1

n	$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数							
1								
2								