

5.2 导数的运算

由导函数的定义可知, 一个函数的导数是唯一确定的. 在必修第一册中我们学过基本初等函数, 并且知道, 很多复杂的函数都是通过对这些函数进行加、减、乘、除等运算得到的. 由此自然想到, 能否先求出基本初等函数的导数, 然后研究出导数的“运算法则”, 这样就可以利用导数的运算法则和基本初等函数的导数求出复杂函数的导数. 本节我们就来研究这些问题.

5.2.1 基本初等函数的导数

根据导数的定义, 求函数 $y=f(x)$ 的导数, 就是求出当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近的那个定值. 下面我们求几个常用函数的导数.

1. 函数 $y=f(x)=c$ 的导数

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0,$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

若 $y=c$ (图 5.2-1) 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0, 即一直处于静止状态.

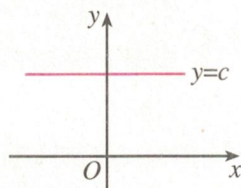


图 5.2-1

2. 函数 $y=f(x)=x$ 的导数

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = 1,$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

若 $y=x$ (图 5.2-2) 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速直线运动.

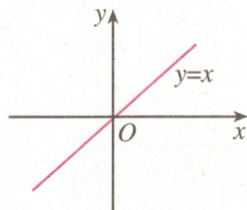


图 5.2-2

3. 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数

因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2+2x \cdot \Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= 2x+\Delta x,\end{aligned}$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x+\Delta x) = 2x.$$

$y'=2x$ 表示函数 $y=x^2$ 的图象 (图 5.2-3) 上点 (x, y) 处切线的斜率为 $2x$, 说明随着 x 的变化, 切线的斜率也在变化. 另一方面, 从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看, $y'=2x$ 表明: 当 $x<0$ 时, 随着 x 的增加, $|y'|$ 越来越小, $y=x^2$ 减少得越来越慢; 当 $x>0$ 时, 随着 x 的增加, $|y'|$ 越来越大, $y=x^2$ 增加得越来越快. 若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=2x$ 可以解释为某物体做变速运动, 它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$.

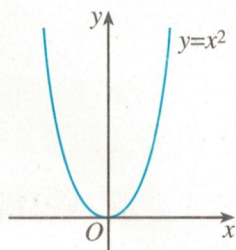


图 5.2-3

4. 函数 $y=f(x)=x^3$ 的导数

因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} \\ &= \frac{x^3+3x^2 \cdot \Delta x+3x \cdot (\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2+3x \cdot \Delta x+(\Delta x)^2,\end{aligned}$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2+3x \cdot \Delta x+(\Delta x)^2] = 3x^2.$$

$y'=3x^2$ 表示函数 $y=x^3$ 的图象 (图 5.2-4) 上点 (x, y) 处切线的斜率为 $3x^2$, 这说明随着 x 的变化, 切线的斜率也在变化, 且恒为非负数.

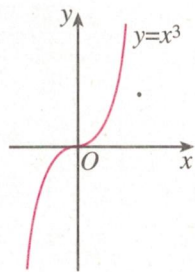


图 5.2-4

5. 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x^2 + x \cdot \Delta x},$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2 + x \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

探究

画出函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象. 根据图象, 描述它的变化情况, 并求出曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

6. 函数 $y = f(x) = \sqrt{x}$ 的导数

因为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}, \end{aligned}$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

前面我们根据导数的定义求出了一些常用函数的导数. 一般地, 有下面的基本初等函数的导数公式表 (表 5.2-1), 这些公式可以直接使用.

表 5.2-1

基本初等函数的导数公式
1. 若 $f(x) = c$ (c 为常数), 则 $f'(x) = 0$;
2. 若 $f(x) = x^a$ ($a \in \mathbf{R}$, 且 $a \neq 0$), 则 $f'(x) = ax^{a-1}$;
3. 若 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$;
4. 若 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(x) = -\sin x$;
5. 若 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则 $f'(x) = a^x \ln a$; 特别地, 若 $f(x) = e^x$, 则 $f'(x) = e^x$;
6. 若 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$; 特别地, 若 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$.

例 1 求下列函数的导数:

(1) $y = x^{\frac{2}{3}}$; (2) $y = \log_2 x$.

解: (1) $y' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

(2) $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$.

例 2 假设某地在 20 年间的年均通货膨胀率为 5%，物价 p (单位: 元) 与时间 t (单位: 年) 之间的关系为

$$p(t) = p_0(1+5\%)^t,$$

其中 p_0 为 $t=0$ 时的物价. 假定某种商品的 $p_0=1$, 那么在第 10 个年头, 这种商品的价格上涨的速度大约是多少 (精确到 0.01 元/年)?

解: 根据基本初等函数的导数公式表, 有

$$p'(t) = 1.05^t \ln 1.05.$$

所以

$$p'(10) = 1.05^{10} \ln 1.05 \approx 0.08.$$

所以, 在第 10 个年头, 这种商品的价格约以 0.08 元/年的速度上涨.

?

如果某种商品的 $p_0=5$, 那么在第 10 个年头, 这种商品的价格上涨的速度大约是多少?

练习

1. 求下列函数的导数:

(1) $y = \frac{1}{x^4}$;

(2) $y = \sqrt[3]{x^4}$;

(3) $y = 3^x$;

(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

(5) $y = \log_4 x$;

(6) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

2. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y = x^5$ 在 $x=3$ 处的导数;

(2) $y = \ln x$ 在 $x = \frac{2}{3}$ 处的导数;

(3) $y = \sin x$ 在 $x=2\pi$ 处的导数;

(4) $y = e^x$ 在 $x=0$ 处的导数.

3. 求余弦曲线 $y = \cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 处的切线方程.

4. 求曲线 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在点 $(4, 2)$ 处的切线方程.