

4.1 指数

为了研究指数函数，我们需要把指数的范围拓展到全体实数.

初中已经学过整数指数幂. 在学习幂函数时，我们把正方形场地的边长 c 关于面积 S 的函数 $c=\sqrt{S}$ 记作 $c=S^{\frac{1}{2}}$. 像 $S^{\frac{1}{2}}$ 这样以分数为指数的幂，其意义是什么呢？下面从已知的平方根、立方根的意义入手展开研究.

4.1.1 n 次方根与分数指数幂

我们知道：

如果 $x^2=a$ ，那么 x 叫做 a 的平方根. 例如， ± 2 就是 4 的平方根.

如果 $x^3=a$ ，那么 x 叫做 a 的立方根. 例如，2 就是 8 的立方根.

类似地，由于 $(\pm 2)^4=16$ ，我们把 ± 2 叫做 16 的 4 次方根；由于 $2^5=32$ ，2 叫做 32 的 5 次方根.

一般地，如果 $x^n=a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$ ，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数. 这时， a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示. 例如，

$$\sqrt[5]{32}=2, \sqrt[5]{-32}=-2, \sqrt[3]{a^6}=a^2.$$

当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为相反数. 这时，正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示. 正的 n 次方根与负的 n 次方根可以合并写成 $\pm\sqrt[n]{a}$ ($a>0$). 例如，

$$\sqrt[4]{16}=2, -\sqrt[4]{16}=-2, \pm\sqrt[4]{16}=\pm 2.$$

负数没有偶次方根.

0 的任何次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0}=0$.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做 **根式** (radical)，这里 n 叫做 **根指数**， a 叫做 **被开方数**.

根据 n 次方根的意义，可得

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

例如， $(\sqrt{5})^2=5$ ， $(\sqrt[5]{-3})^5=-3$.

?

为什么负数没有偶次方根？

探究

$\sqrt[n]{a^n}$ 表示 a^n 的 n 次方根, $\sqrt[n]{a^n} = a$ 一定成立吗? 如果不一定成立, 那么 $\sqrt[n]{a^n}$ 等于什么?

可以得到:

当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$;

当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

例 1 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$; (2) $\sqrt{(-10)^2}$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$; (4) $\sqrt{(a-b)^2}$.

解: (1) $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$;

(2) $\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = |3-\pi| = \pi-3$;

(4) $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geq b, \\ b-a, & a < b. \end{cases}$

根据 n 次方根的定义和数的运算, 我们知道

$$\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5]{(a^2)^5} = a^2 = a^{\frac{10}{5}} \quad (a > 0),$$

$$\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = a^3 = a^{\frac{12}{4}} \quad (a > 0).$$

这就是说, 当根式的被开方数 (看成幂的形式) 的指数能被根指数整除时, 根式可以表示为分数指数幂的形式.

思考

当根式的被开方数的指数不能被根指数整除时, 根式是否也可以表示为分数指数幂的形式?

把根式表示为分数指数幂的形式时, 例如, 把 $\sqrt[3]{a^2}$, \sqrt{b} , $\sqrt[4]{c^5}$ 等写成下列形式:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0),$$

$$\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} \quad (b > 0),$$

$$\sqrt[4]{c^5} = c^{\frac{5}{4}} \quad (c > 0),$$

我们希望整数指数幂的运算性质, 如 $(a^k)^n = a^{kn}$, 对分数指数幂仍然适用.

由此, 我们规定, 正数的正分数指数幂的意义是

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

于是, 在条件 $a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1$ 下, 根式都可以写成分数指数幂的形式.

正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿, 我们规定,

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

例如, $5^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}}, a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}.$

与 0 的整数指数幂的意义相仿, 我们规定,

0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

规定了分数指数幂的意义以后, 幂 a^x 中指数 x 的取值范围就从整数拓展到了有理数.

整数指数幂的运算性质对于有理数指数幂也同样适用, 即对于任意有理数 r, s , 均有下面的运算性质.

- (1) $a^r a^s = a^{r+s} \quad (a > 0, r, s \in \mathbf{Q});$
- (2) $(a^r)^s = a^{rs} \quad (a > 0, r, s \in \mathbf{Q});$
- (3) $(ab)^r = a^r b^r \quad (a > 0, b > 0, r \in \mathbf{Q}).$

例 2 求值:

(1) $8^{\frac{2}{3}};$ (2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}.$

解: (1) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4;$

(2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3^4}{2^4}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4 \times \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$

例 3 用分数指数幂的形式表示并计算下列各式 (其中 $a > 0$):

(1) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2};$ (2) $\sqrt{a \sqrt[3]{a}}.$

解: (1) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 a^{\frac{2}{3}} = a^{2 + \frac{2}{3}} = a^{\frac{8}{3}};$

(2) $\sqrt{a \sqrt[3]{a}} = (a a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}.$

数学中, 引进一个新的概念或法则时, 总希望它与已有的概念或法则相容.

这里, 略去了规定合理性的说明.

例 4 计算下列各式 (式中字母均是正数):

$$(1) (2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}) \div (-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}); \quad (2) (m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8;$$

$$(3) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt{a^3}) \div \sqrt[4]{a^2}.$$

解: (1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}) \div (-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$
 $= [2 \times (-6) \div (-3)] a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}}$
 $= 4ab^0$
 $= 4a;$

(2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8 = (m^{\frac{1}{4}})^8 (n^{-\frac{3}{8}})^8$
 $= m^2 n^{-3}$
 $= \frac{m^2}{n^3};$

(3) $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt{a^3}) \div \sqrt[4]{a^2} = (a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{3}{2}}) \div a^{\frac{1}{2}}$
 $= a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{1}{2}}$
 $= a^{\frac{1}{6}} - a$
 $= \sqrt[6]{a} - a.$

练习

1. 用根式的形式表示下列各式 ($a > 0$):

$$(1) a^{\frac{1}{2}}; \quad (2) a^{\frac{3}{4}}; \quad (3) a^{-\frac{3}{5}}; \quad (4) a^{-\frac{2}{3}}.$$

2. 用分数指数幂的形式表示并计算下列各式:

$$(1) \sqrt[3]{x^2} (x > 0); \quad (2) \sqrt[5]{(m-n)^4} (m > n);$$

$$(3) \sqrt{p^6} \sqrt{p^5} (p > 0); \quad (4) \frac{a^3}{\sqrt{a}} (a > 0).$$

3. 计算下列各式:

$$(1) \left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad (2) 2\sqrt{3} \times 3\sqrt[3]{1.5} \times \sqrt[6]{12};$$

$$(3) a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} a^{-\frac{1}{8}} (a > 0); \quad (4) 2x^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right).$$

4.1.2 无理数指数幂及其运算性质

上面我们将 a^x ($a > 0$) 中指数 x 的取值范围从整数拓展到了有理数. 那么, 当指数 x 是无理数时, a^x 的意义是什么? 它是一个确定的数吗? 如果是, 那么它有什么运算性质?

在初中的学习中, 我们通过有理数认识了一些无理数. 类似地, 也可以通过有理数指数幂来认识无理数指数幂.