

6.4.3 余弦定理、正弦定理

一个三角形含有各种各样的几何量,例如三边边长、三个内角的度数、面积等,它们之间存在着确定的关系.例如,在初中,我们得到过勾股定理、锐角三角函数,这是直角三角形中的边、角定量关系.对于一般三角形,我们已经定性地研究过三角形的边、角关系,得到了SSS, SAS, ASA, AAS等判定三角形全等的方法.这些判定方法表明,给定三角形的三个角、三条边这六个元素中的某些元素,这个三角形就是唯一确定的.那么三角形的其他元素与给定的某些元素有怎样的数量关系?

下面我们利用向量方法研究这个问题.

1. 余弦定理

我们知道,两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等.这说明,给定两边及其夹角的三角形是唯一确定的.也就是说,三角形的其他边、角都可以用这两边及其夹角来表示.那么,表示的公式是什么?

探究

在 $\triangle ABC$ 中,三个角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,怎样用 a, b 和 C 表示 c ?

因为涉及的是三角形的两边长和它们的夹角,所以我们考虑用向量的数量积来探究.

如图6.4-8,设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, 那么

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}. \quad \textcircled{1}$$

我们的研究目标是用 $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ 和 C 表示 $|\boldsymbol{c}|$,联想到数量积的性质 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|^2$,可以考虑用向量 \boldsymbol{c} (即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$)与其自身作数量积运算.

由①得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{c}|^2 &= \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ &= a^2 + b^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos C. \end{aligned}$$

所以

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

同理可得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B.$$

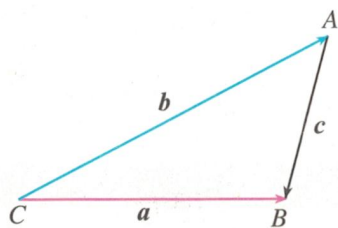


图 6.4-8

从这里的推导过程,你感受到向量运算的力量了吗?

于是, 我们得到了三角形中边角关系的一个重要定理:

余弦定理 (cosine theorem) 三角形中任何一边的平方, 等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

你能用其他方法证明余弦定理吗?

利用余弦定理, 我们可以从三角形已知的两边及其夹角直接求出第三边.

思考

余弦定理指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系. 应用余弦定理, 我们可以解决已知三角形的三边确定三角形的角的问题, 怎么确定呢?

由余弦定理, 可以得到如下推论:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

余弦定理及其推论把用“SAS”和“SSS”判定三角形全等的方法从数量化的角度进行了刻画.

利用推论, 可以由三角形的三边直接计算出三角形的三个角.

从余弦定理及其推论可以看出, 三角函数把几何中关于三角形的定性结论变成了可定量计算的公式.

思考

勾股定理指出了直角三角形中三边之间的关系, 余弦定理则指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系. 你能说说这两个定理之间的关系吗?

如果 $\triangle ABC$ 中有一个角是直角, 例如, $C = 90^\circ$, 这时 $\cos C = 0$. 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2$, 这就是勾股定理. 由此可见, 余弦定理是勾股定理的推广, 而勾股定理是余弦定理的特例.

一般地, 三角形的三个角 A, B, C 和它们的对边 a, b, c 叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做**解三角形** (solving a triangle).

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 60$ cm, $c = 34$ cm, $A = 41^\circ$, 解这个三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到 1 cm).

解：由余弦定理，得

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\&= 60^2 + 34^2 - 2 \times 60 \times 34 \times \cos 41^\circ \\&\approx 1\,676.78,\end{aligned}$$

所以

$$a \approx 41(\text{cm}).$$

由余弦定理的推论，得

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{34^2 + 41^2 - 60^2}{2 \times 34 \times 41} = -\frac{763}{2\,788},$$

利用计算器，可得 $B \approx 106^\circ$.

所以 $C = 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (41^\circ + 106^\circ) = 33^\circ$.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中， $a=7$ ， $b=8$ ，锐角 C 满足 $\sin C = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ，求 B （精确到 1° ）.

分析：由条件可求 $\cos C$ ，再利用余弦定理及其推论可求出 B 的值.

解：因为 $\sin C = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ，且 C 为锐角，

$$\text{所以 } \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2} = \frac{13}{14}.$$

由余弦定理，得

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 49 + 64 - 2 \times 7 \times 8 \times \frac{13}{14} = 9,$$

所以 $c=3$.

$$\text{进而 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{9 + 49 - 64}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}.$$

利用计算器，可得

$$B \approx 98^\circ.$$

练习

- (1) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=12.9$ cm， $c=15.4$ cm， $A=42.3^\circ$ ，解这个三角形（角度精确到 0.1° ，边长精确到 0.1 cm）；
(2) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=5$ ， $b=2$ ， $C=\frac{\pi}{3}$ ，求 c .
- 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2$ ， $b=\sqrt{2}$ ， $c=\sqrt{3}+1$ ，解这个三角形.
- 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=5$ ， $c=2$ ，锐角 A 满足 $\sin A = \frac{\sqrt{231}}{20}$ ，求 C （精确到 1° ）.