

2

用配方法求解一元二次方程

在上一节的问题中, 梯子底端滑动的距离 x (m) 满足方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$. 我们已经求出了 x 的近似值, 你能设法求出它的精确值吗?



议一议

- (1) 你能解哪些特殊的一元二次方程?
- (2) 你会解下列一元二次方程吗? 你是怎么做的?

$$x^2 = 5, 2x^2 + 3 = 5, x^2 + 2x + 1 = 5, (x + 6)^2 + 7^2 = 10^2.$$

(3) 你能解方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$ 吗? 你遇到的困难是什么? 你能设法将这个方程转化成上面方程的形式吗? 与同伴进行交流.

我们可以将方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$ 转化为

$$(x + 6)^2 = 51,$$

两边开平方, 得

$$x + 6 = \pm \sqrt{51}.$$

因此我们说方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$ 有两个根 $x_1 = \sqrt{51} - 6$, $x_2 = -\sqrt{51} - 6$.

这里, 解一元二次方程的思路是将方程转化为 $(x + m)^2 = n$ 的形式, 它的一边是一个完全平方式, 另一边是一个常数, 当 $n \geq 0$ 时, 两边同时开平方, 转化为一元一次方程, 便可求出它的根.

x_1, x_2 都符合原问题的要求吗?



做一做

填上适当的数, 使下列等式成立:

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + \underline{\hspace{2cm}} &= (x + 6)^2; \\ x^2 - 4x + \underline{\hspace{2cm}} &= (x - \underline{\hspace{2cm}})^2; \\ x^2 + 8x + \underline{\hspace{2cm}} &= (x + \underline{\hspace{2cm}})^2. \end{aligned}$$

在上面等

例1 解方
解: 可以

两边都加

即

两边开平

即

所以

在例1中,
种解一元二次

随堂练习

解下列方程:

(1) $x^2 - 10x =$

(3) $x^2 + 3x =$



知识技能

1. 解下列方程:

(1) $x^2 + 12x =$

(3) $x^2 - 6x =$

在上面等式的左边，常数项和一次项系数有什么关系？

例1 解方程： $x^2 + 8x - 9 = 0$.

解：可以把常数项移到方程的右边，得

$$x^2 + 8x = 9.$$

两边都加 4^2 （一次项系数 8 的一半的平方），得

$$x^2 + 8x + 4^2 = 9 + 4^2,$$

即

$$(x + 4)^2 = 25.$$

两边开平方，得

$$x + 4 = \pm 5,$$

即

$$x + 4 = 5, \text{ 或 } x + 4 = -5.$$

所以

$$x_1 = 1, x_2 = -9.$$

在例1中，我们通过配成完全平方式的方法得到了一元二次方程的根，这种解一元二次方程的方法称为配方法（solving by completing the square）.

随堂练习

解下列方程：

(1) $x^2 - 10x + 25 = 7$;

(2) $x^2 - 14x = 8$;

(3) $x^2 + 3x = 1$;

(4) $x^2 + 2x + 2 = 8x + 4$.

习题 2.3

知识技能

1. 解下列方程：

(1) $x^2 + 12x + 25 = 0$;

(2) $x^2 + 4x = 10$;

(3) $x^2 - 6x = 11$;

(4) $x^2 - 9x + 19 = 0$.